Algèbre générale et linéaire

28 novembre 2018

1 Groupes

1.1 Lemme de Dirichlet

Soient G un groupe et $f_1, \dots, f_n$ des morphismes de groupes deux à deux distincts de G dans $\mathbf{C}*$. Montrer que $f_1, \dots, f_n$ est libre dans l'espace vectoriel complexe des fonctions de G dans $\mathbf{C}$.

1.2 Classification

Déterminer, à un isomorphisme près, tous les groupes de cardinal 6.

1.3

Paris. Que dire d'un groupe G dont le groupe des automorphismes est trivial ?

1.4

Soit G un groupe fini non commutatif. Lorsque $x \in G$, on pose $C(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}$, $\tilde{C}(x) = \{(x, y) \mid y \in C(x)\}$ et l'on note $Com(G) = \{(x, y) \in G^2 \mid xy = yx\}$.

a) Soit $x \in G \setminus Z(G)$. Montrer qu'il existe des entiers $k \geq 2$ et $m \geq 2$ tels que $|G| = m|C(x)|$ et $|C(x)| = n|Z(G)|$. Que dire de l'index de $Z(G)$ dans G ?

b) Montrer que

$$|Com(G)| = \sum_{x \in Z(G)} |\tilde{C}(x)| + \sum_{x \in G \setminus Z(G)} |\tilde{C}(x)|$$

et en déduire que la probabilité pour que deux éléments de G commutent et majorée par $\frac{5}{8}$.

prob de gén : décomposition cycle en transpo

2 Groupe symétrique.

2.1 Générateurs

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Monter que $(1, 2)$ et le cycle $(1, 2, \dots, n)$ engendrent S_n.

2.2 Cycles

a) Montrer que deux cycles de même longueur sont conjugués. En déduire la signature d'un cycle de longueur p, puis celle d'une permutation en fonction de sa décomposition en cycles.
b) Quels sont les cycles qui sont des carrés ?

2.3 Commutateurs

a) Montrer que toute permutation du groupe alterné est produit de cycles de longueur trois.
b) Montrer que le groupe des commutateurs de S_n est A_n.

2.4 Sous-groupes de S_4

Décrire tous les sous-groupes de S_4.

2.5

a) Déterminer le nombre moyen de points fixes d'une permutation de n éléments. On pourra introduire la VA X_i qui à une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ attache 0 si $\sigma(i) \neq i$ et 1 sinon. Donner ensuite l'écart-type de la distribution.
b) De même, soit X la VA sur S_n muni de l'équiprobabilité qui à $\sigma \in S_n$ attache la longueur m de l'orbite de 1 pour σ. Donner la loi de X.

3 Arithmétique

3.1

Quel est le nombre maximal de points de $\mathbb{Q}^2$ appartenant à un cercle C ? (Penser à une paramétrisation rationnelle du cercle unité). Et dans le cas où C est centré dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$?

3.2 Liouville

Soit p un entier > 5. Montrer que l'équation $(p-1)! + 1 = p^m$, $m \in \mathbb{N}$ ne possède pas de solution.

$(p-1)!$ [illegible]
modulo $p-1$ [illegible] $(p-2)! \equiv m\ [p-1]$ [illegible]

3.3 Premier résidu non quadratique

Soit p un nombre premier ≥ 3. Montrer que le premier n qui n'est pas un résidu quadratique modulo p est $< 1 + \sqrt{p}$. $\to a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$

3.4

a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k + 2$.
b) Soient p un nombre premier de la forme $3k + 2$ et $A \subset (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$. Si $x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$ on pose $B(x) = A \cap \{(k+1)x, \ldots, (2k+1)x\}$. Calculer $\sum_{x \in (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*} |B(x)|$.
c) Si $(G, +)$ est un groupe abélien, on dit qu'une partie B de $G \setminus \{0\}$ est *sans somme* lorsque $(B + B) \cap B = \emptyset$. Montrer que $k+1, \ldots, 2k+1$ donne une partie sans somme de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Soit A une partie non vide de $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une partie sans somme B de A telle que $|B| \geq |A|/3$.

4 Anneaux et corps

4.1 · Anneau local.

Soit A l'anneau des fractions rationnelles complexes n'ayant pas de pôle en 0. Soit I un idéal non nul de A. Montrer qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $I = X^k A$.

4.2 Anneaux de fonctions différentiables

a) Les anneaux $C([0,1], \mathbf{R})$ et $C^1([0,1], \mathbf{R})$ sont-ils isomorphes ?
b) Soit I l'idéal de $A = C^1([0,1], \mathbf{R})$ formé par les fonctions de A qui s'annulent en 0. I est-il premier ? Maximal ? Principal ? Mêmes questions si l'on remplace A par $C^\infty([0,1], \mathbf{R})$.

5 Polynômes

5.1

Soit $f(z) = z^{n+1} + a_n z^n + \ldots + a_0 (a_0 \neq 0)$, et ~~pour $k \leq$~~ n, $g(z) = z^{n+1} - |a_n| z^n - \ldots - |a_0|$. Montrer que g s'annule une et une seule fois sur $[0 + \infty[$, mettons en ρ, et que tout complexe ~~x~~ de f vérifie $|z| \leq \rho$.

z racine

5.2

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme à coefficients strictement positifs, et x une racine complexe de P. Montrer que

$$\min_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \leq |x| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

On pourra commencer par le cas où $r = \max_{0 \leq k \leq n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = 1$, puis considérer $Q = (X-1)P(X)$.

5.3 Racines de l'unité

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ de degré $2n+1$, avec $n \geq 1$, tel que $P(-1) = P(1) = 0$. Montrer que

$$\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq (1 + \frac{1}{n})|P(0)|$$

5.4

a) Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire. Montrer que toutes les racines rationnelles de P sont entières. Quelles sont les racines rationnelles possibles de P si en outre $P(0)$ est premier ?

b) Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $P(\mathbf{Q}) \subset \mathbf{Q}$ et $P(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

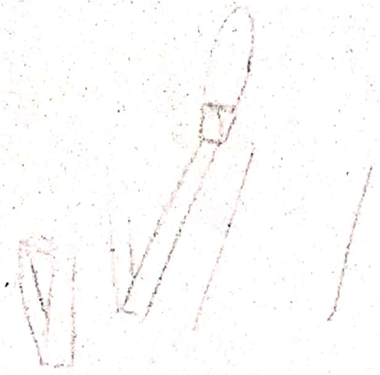
5.5

Trouver toutes les fractions rationnelles réelles R telles que $R(\mathbf{N}) \subset \mathbf{N}$. On pourra envisager $R(x+1) - R(x)$.

5.6

a) On note d l'opérateur sur $\mathbf{C}[X,Y]$ défini par $d(P) = P'_X - iP'_Y$, $\overline{d}$ l'opérateur sur $\mathbf{C}[X,Y]$ défini par $\overline{d}(P) = P'_X + iP'_Y$, $\Delta = d\overline{d}$ est le laplacien, $Z = X + iY$; $\overline{Z} = X - iY$. Etudier l'action de Δ sur $Z^m \overline{Z}^n$, $(m,n) \in \mathbf{N}^2$.

b) Soient n un entier ≥ 1, et H le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n de $\mathbf{C}[X,Y]$. On pose $E = \{P \in H | \Delta(P) = 0\}$ (Δ est le laplacien) et $F = \{Q \in H | X^2 + Y^2 | Q\}$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans H.



6 Endomorphismes

6.1 Factorisations

Soient E, F, G trois K-espaces vectoriels.
a) Soit $u \in L(E,F)$, $v \in L(E,G)$. Montrer qu'il existe $w \in L(F,G)$ tel que $v = w \circ u$ si et seulement si $Ker u \subset Ker v$.
b) Soit $u \in L(E,G)$ et $v \in L(F,G)$. Montrer qu'il existe $w \in L(E,F)$ tel que $u = v \circ w$ si et seulement si $Im u \subset Im v$.

6.2

Soit S l'ensemble des applications linéaires surjectives de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$. Montrer que S est soit vide, soit dense dans $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

6.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u, v \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$. On suppose que $u \circ v = 0$ et que $u + v$ est inversible. Calculer $\text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

6.4 Crochet et nilpotence

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, et a dans $L(E)$.
a) Montrer qu'il existe $b \in L(E)$ tel que $a = aba$.
b) Si a est nilpotent, vérifier que l'application définie sur $L(E)$ par $u \mapsto a \circ u - u \circ a$ est nilpotente et calculer son indice de nilpotence en fonction de celui de a.

6.5 Fonctions splines

Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et $\sigma = (x_0 = a, \ldots, x_n = b)$ une subdivision de $[a,b]$. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ dont la restriction à chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus 3.
1) Nature de $\mathcal{S}$? Dimension ?
2) Pour $y = (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on pose $\mathcal{T}(y) = \{f \in \mathcal{S} \ ; \ \forall i \in [\![0,n]\!] \quad f(x_i) = y_i\}$. Nature de $\mathcal{T}(y)$? Dimension ?
3) Existence et unicité de $f \in \mathcal{T}(y)$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$? (Considérer pour un élément $f \in \mathcal{T}(0)$ vérifiant ces conditions, l'intégrale $\int_a^b (f''(x))^2 \, dx$).
4) Même question avec les conditions $f'(a) = \lambda$ et $f'(b) = \mu$.
5) Soit f une application $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ et φ l'élément de $\mathcal{S}$ tel que $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout i, $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = f'(b)$. Calculer $\int_a^b (\varphi'' - f'')^2$ en fonction d'intégrales portant sur f, φ et leurs dérivées. Interpréter.

7 Matrices et déterminants

7.1

Soit F une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{K})$, contenant au moins un élément de $Gl_n(\mathbf{K})$. Montrer que $F \cap Gl_n(\mathbf{K})$ est un sous-groupe de $Gl_n(\mathbf{K})$.

7.2

Soient n et p deux entiers, avec $1 \leq p \leq n$. Montrer qu'il existe une base de $M_n(\mathbf{C})$ formée de matrices de rang p.

7.3

Cachan, Rennes. Un paysan possède $(2n+1)$ vaches. Lorsqu'il isole n'importe laquelle d'entre elles, il peut séparer l'ensemble des $2n$ autres en deux groupes de n vaches dont la somme des masses est égale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.

7.4

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a) Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_n(\mathbf{R})$ qui soit invariante par similitude.

b) Montrer qu'un semi-norme sur $M_n(\mathbf{R})$ est continue, puis déterminer toutes les semi-normes sur $M_n(\mathbf{R})$ qui sont invariantes par similitude.

7.5

Soit $(A, B) \in M_n(\mathbf{R})^2$ avec $A^2 + B^2 = \sqrt{3}(AB - BA)$, et $AB - BA$ inversible. Montrer que n est un multiple de 6.

7.6

Calculer le déterminant de la matrice $A = [(-1)^{max(i,j)}]$, $1 \leq i, j \leq n$.

7.7

Soient $X_{i,j}$ n^2 VAI possédant toutes un moment d'ordre 2. Donner l'espérance de la VA $X = \det(X_{i,j})$; en calculer la variance lorsque les $X_{i,j}$ sont centrées.

7.8

Calculer le déterminant de la matrice $A = [(i + j - 1)^n]_{1 \leq i,j \leq n+1}$.